

Codificação de problemas

computacionais na categoria dos grafos



¹Paulo Vítor Macedo Dias

Colaboradores: ²Anny Beatriz de Azevedo & ³Hugo Luiz Mariano

Orientador: ⁴Benjamin Merlin Bumpus

^{1,2,3,4}Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
Universidade de São Paulo – IME-USP

¹paulomd@usp.br, ²annybeatriz.azevedo@usp.br, ³hugomar@ime.usp.br,
⁴bumpus@usp.br



1. Introdução

Este projeto investiga a formalização de problemas computacionais através da Teoria das Categorias. A base teórica é o Teorema de Fagin, que estabelece a equivalência entre problemas da classe NP e a Lógica Existencial de Segunda Ordem ($\exists$ SO). Dando início a essa conexão, o trabalho foca na codificação de fórmulas lógicas de Primeira Ordem (FO).

A categoria de estudo é a dos grafos, que, através da sua generalização para C -sets, modela bancos de dados.

O objetivo é entender como usar a linguagem categórica para estudar a satisfatibilidade dessas fórmulas, e criar ferramentas eficientes para lidar com grandes volumes de dados.

2. Grounding via Teoria dos Topoi

Dada uma fórmula ϕ de primeira ordem sobre um modelo finito G , eliminamos os quantificadores por meio do *grounding*, e então calculamos o subobjeto ϕ_G correspondente por meio das operações da Álgebra de Heyting.

Essa construção nos fornece o subobjeto $\phi_G \rightarrowtail G$ tal que

$$G \models \phi \iff \phi_G \neq \emptyset.$$

Então, passamos a codificar $G \models \phi$ com o seguinte *pullback*:

$$\begin{array}{ccc} \phi_G & \rightarrowtail & G \\ \downarrow ! & \lrcorner & \downarrow \chi\phi_G \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

3. Relacionando fórmulas e modelos distintos

Agora, vamos supor que temos um segundo grafo H e uma fórmula ψ sobre ele, e queremos entender como a satisfatibilidade de ϕ em G se relaciona com a de ψ em H . A implicação

$$G \models \phi \implies H \models \psi$$

é equivalente à existência de um epimorfismo $e : G \rightarrow H$ tal que $\chi\phi_G \leq \chi\psi_H \circ e$, como no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} \phi_G \rightarrowtail & G & \xrightarrow{e} & H & \leftarrowtail \psi_H \\ & \searrow \chi\phi_G & \leq & \nwarrow \chi\psi_H & \\ & & \Omega & & \end{array}$$

4. A Busca por Explicabilidade

A abordagem apresentada nas seções anteriores codifica a satisfatibilidade apenas como um valor booleano: o subobjeto ϕ_G restringe-se a ser o próprio modelo (quando verdadeiro) ou o grafo vazio (quando falso). Com isso, perdem-se informações sobre os potenciais certificados.

Para reter esses certificados e, respectivamente, permitir uma análise mais rica, é necessário adicionar mais estrutura aos objetos em questão.

5. Definindo Estratégias

Para uma fórmula ϕ sobre um modelo G , a **Estratégia** $\text{Strat}_\phi(G)$ é o objeto que representa as potenciais atribuições para as variáveis da fórmula. Para sentenças com alternância padrão $\forall x_n \exists y_n$, as estratégias são definidas recursivamente por exponenciais:

$$\text{Strat}_n(G) = G[s_n]^{\text{Strat}_{n-1}(G) \times G[t_n]}, \quad \text{Strat}_0(G) = 1$$

onde t_n e s_n representam os tipos de x_n e y_n (vértices ou arestas).

Para isolarmos os certificados válidos, avaliamos o mapa ϕ_G sobre o espaço total $\text{Strat}_\phi(G)$ e tomamos o *pullback* ao longo da constante $\top : 1 \rightarrowtail 2$. Define-se então a **Variedade** $\mathbb{V}_\phi(G)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_\phi(G) & \xrightarrow{\quad} & \text{Strat}_\phi(G) \\ \downarrow ! & \lrcorner & \downarrow \phi_G \\ 1 & \xrightarrow{\top} & 2 \end{array}$$

6. Relacionando Estratégias e Explorando Datasets

Dada uma propriedade ϕ num *dataset* massivo G , queremos entender por que ela é verdadeira. Para isso, podemos tomar um quociente $G_{/P}$ (uma forma de comprimir G) e buscar uma fórmula ψ que nos ajude a explicá-la.

Uma das formas de alcançar isso é quando existe um mapa entre as estratégias tal que o *pullback* coincida com a variedade $\mathbb{V}_\phi(G)$:

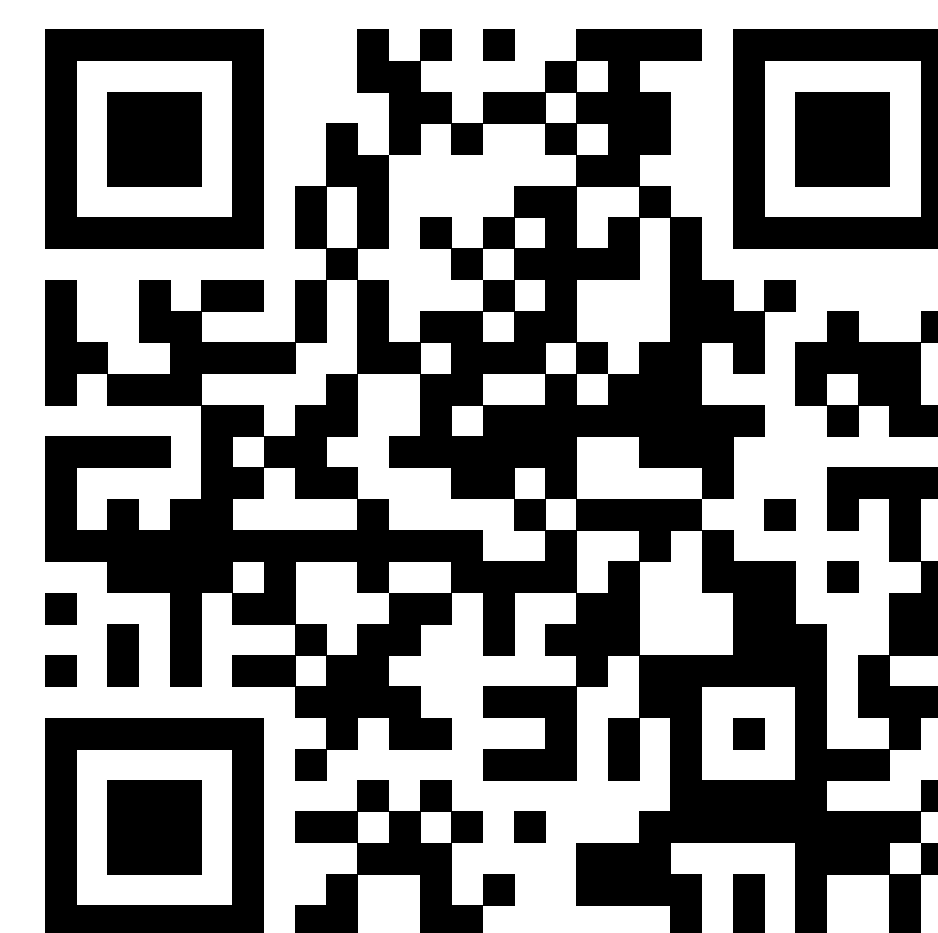
$$\begin{array}{ccc} \text{Strat}_\phi(G) & \xrightarrow{\quad} & \text{Strat}_\psi(G_{/P}) \\ \uparrow & \lrcorner & \uparrow \\ \mathbb{V}_{\phi_G} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{V}_{\psi_{G_{/P}}} \end{array}$$

Embora seja uma exigência forte, quando esse *pullback* existe, somos capazes de transformar as testemunhas do quociente em testemunhas para o modelo global. Isso nos permite inspecionar o objeto reduzido e extrair a intuição de por que a propriedade original de fato vale no *dataset* massivo.

7. Trabalhos Futuros

A direção a longo prazo do projeto envolve:

- **Generalização para C -sets:** Expandir os resultados desenvolvidos para o caso geral de C -sets, onde C é uma categoria pequena. Isso significa explorar diferentes estruturas de *datasets*.
- **Relaxamento da Explicabilidade:** A exigência de que o *pullback* coincida com a variedade de ϕ é uma condição muito forte. Investigaremos propriedades mais fracas do *gadget* de explicação que garantam a recuperação de outras quantidades de certificados do *dataset* global.
- **Exploração de Modalidades:** A Seção 3 envolve essencialmente a composição com endomorfismos monótonos no classificador Ω . Estudaremos como o uso de outras modalidades afeta a extração dos certificados e demais inferências.



Escaneie para ver implementações, demonstrações e demais detalhes.

Referências

- [1] Steve Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, 2 edition, 2010.
- [2] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [3] Robert Goldblatt. *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*. Dover Publications, 2 edition, 2006.
- [4] Gonzalo E. Reyes, María E. Reyes, and Hamid Zolfaghari. Generic figures and their glueings. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1996.